

CH.30 : OPTIQUE ONDULATOIRE

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

CH.30 : OPTIQUE ONDULATOIRE	1
I. PRELIMINAIRES	2
I.1. NOTION DE CHEMIN OPTIQUE	2
I.1.1. Définition	2
I.1.2. Surface d'onde et stigmatisme	2
I.1.3. Théorème de Malus	2
I.2. LES DIFFERENTS MODELES DE LA LUMIERE	3
I.2.1. Le modèle géométrique	3
I.2.2. Le modèle corpusculaire	3
I.2.3. Le modèle ondulatoire	3
I.2.4. Quel modèle utiliser ?	3
II. INTERFERENCES LUMINEUSES	4
II.1. NOTION DE « VIBRATION LUMINEUSE »	4
II.1.1. Théorie scalaire de la lumière	4
II.1.2. Composition de 2 vibrations lumineuses	4
II.1.3. Notion de « COHERENCE »	5
II.1.4. Notion d'ordre d'interférence	5
II.2. INTERFERENCES PAR DIVISION DU FRONT D'ONDE	5
II.2.1. Fonctionnement de principe en lumière monochromatique	5
II.2.2. Exemple du dispositif des trous d'Young	6
II.2.3. Autres dispositifs diviseurs du front d'onde	7
II.2.4. Problème de la cohérence spatiale	7
II.2.5. Problème de la cohérence temporelle	8
II.2.6. Utilisation de ces dispositifs en lumière « blanche »	9
II.3. INTERFERENCES PAR DIVISION D'AMPLITUDE	10
II.3.1. Description de l'interféromètre de Michelson	10
II.3.2. Utilisation en lame d'air : franges d'égale inclinaison	11
II.3.3. Utilisation en coin d'air : franges d'égale épaisseur	11
III. DIFFRACTION A L'INFINI	12
III.1. PRINCIPE D' HUYGENS – FRESNEL	12
III.1.1. Enoncé	12
III.1.2. Expression mathématique du Principe	12
III.1.3. Distinction « diffraction à distance finie » ou « diffraction à l'infini »	13
III.1.4. Diffraction à l'infini d'une onde plane par un diaphragme plan	13
III.2. EXEMPLE D' UNE OUVERTURE RECTANGULAIRE	14
III.2.1. Expression de l'éclairement	14
III.2.2. Cas limite d'une fente « fine »	14
III.3. CAS D' UNE OUVERTURE CIRCULAIRE	15
III.4. DIFFRACTION ET LIMITATIONS D' UN SYSTEME OPTIQUE	16
IV. RESEAUX PLANS	16
IV.1. GENERALITES	16
IV.1.1. Définitions	16

IV.1.2. Différents types de réseaux plans 16
 IV.2. ETUDE QUANTITATIVE 17
 IV.2.1. Différence de marche entre 2 rayons voisins..... 17
 IV.2.2. Expression de l'éclairement..... 17
 IV.2.3. Application pratique : spectroscopie à réseau 18
 V. REMARQUES FINALES..... 18

I. PRELIMINAIRES

I.1. NOTION DE CHEMIN OPTIQUE

I.1.1. Définition

- Soit un milieu caractérisé en tout point $M(x,y,z)$ par un indice $n(x,y,z)$; on définit le **chemin optique** entre 2 points A et B , le long d'une courbe (C) par :

$$L_{AB} = (AB) = \int_{A/(C)}^B n(x,y,z) dl$$

- Le chemin optique est égal à la distance que franchirait la lumière dans le **vide** pendant le **même temps** Δt qu'elle met à parcourir la courbe (C) dans le **milieu considéré** ; en effet :

$$(AB) = \int_{A/(C)}^B \frac{c}{v(M)} \times dl \quad \text{avec : } dl = v(M) dt \quad \Rightarrow \quad (AB) = \int_{A/(C)}^B c \times dt = c \times \Delta t$$

- Par ailleurs : $L_{AB} = L_{BA}$, et pour un milieu **homogène** : $(AB) = n \times AB$

I.1.2. Surface d'onde et stigmatisme

- **Définition** : une surface d'onde (Σ) , relative à une source ponctuelle (S) , est le lieu des points M tels que :

$$(SM) = cste$$

- **Lien avec les surfaces équiphases** : considérons une onde émise en (S) de la forme :

$$\underline{y}(S,t) = A(S) \exp(i\omega t) \Rightarrow \text{pour 2 points } M \text{ et } M', \text{ on aura :}$$

$$\underline{y}(M,t) = A(M) \exp[i\omega(t - \Delta t)] \text{ et } \underline{y}(M',t) = A(M') \exp[i\omega(t - \Delta t')], \text{ où } \Delta t = \frac{(SM)}{c} \text{ et } \Delta t' = \frac{(SM')}{c}$$

\Rightarrow si $(SM) = (SM')$, alors $\underline{y}(M,t)$ est **en phase** avec $\underline{y}(M',t)$ \Rightarrow les **surfaces d'ondes sont les surfaces équiphases**.

- **Stigmatisme** : 2 points A et B seront donc **stigmatiques** vis-à-vis d'un système optique (Σ) si le chemin optique (AB) est indépendant du rayon ayant traversé le système (Σ) (ceci est une condition nécessaire et suffisante).

I.1.3. Théorème de Malus

- **Énoncé** : dans un milieu isotrope, après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons issus d'un même point source demeurent **perpendiculaires** aux **surfaces d'ondes**.
- **Exemples** : pour une onde plane, les rayons sont parallèles entre eux, et perpendiculaires aux plans d'ondes ; pour une onde sphérique, les rayons lumineux sont justement les rayons des sphères d'ondes.

- **Application** : considérons les cas de figure ci-dessous :

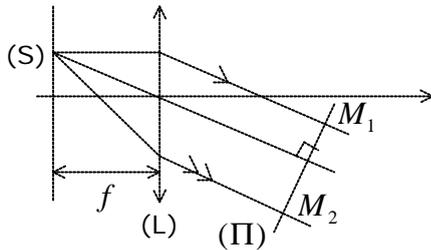


figure (a)

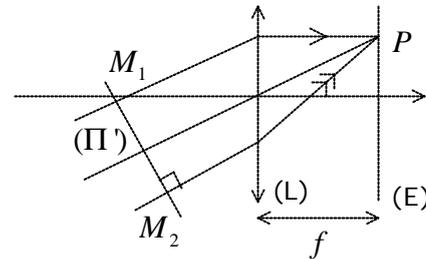


figure (b)

♦ dans le cas (a), la source (S) est placée dans le plan focal objet d'une lentille (L) ; les rayons ressortent parallèles, (Π) est un plan d'onde $\Rightarrow (SM_1) = (SM_2)$.

♦ dans le cas (b), des rayons parallèles convergent en un même point P d'un écran (E) placé dans le plan focal image d'une lentille (L) : si l'on plaçait une source ponctuelle en P , on se retrouverait dans le cas (a), et l'on aurait toujours $(PM_1) = (PM_2)$; le principe du retour inverse de la lumière fait que l'on a effectivement $(M_1P) = (M_2P)$.

En revanche, les ondes en M_1 et M_2 ne sont pas forcément en phase, et (Π') n'est plus un plan d'onde : simplement, toute différence de phase entre les 2 rayons acquise avant le plan (Π') sera conservée jusqu'en P (nous nous servirons souvent de ce résultat).

1.2. LES DIFFERENTS MODELES DE LA LUMIERE

1.2.1. Le modèle géométrique

- C'est le modèle qui, historiquement, s'est développé le premier : il peut traiter beaucoup de phénomènes, comme la formation des images dans les appareils photographiques, les télescopes, les microscopes etc...
- En revanche, il ne peut interpréter correctement les phénomènes d'interférences lumineuses et de diffraction.

1.2.2. Le modèle corpusculaire

- Newton avait déjà imaginé un modèle corpusculaire (inspiré de ses idées sur la mécanique) pouvant interpréter approximativement la diffraction (un champ gravitationnel pouvait même modifier la trajectoire de ses particules de lumière pesantes, comme en Relativité Générale !).
- Le modèle plus moderne du photon (Einstein, 1905) s'applique facilement à « l'effet photoélectrique ».

1.2.3. Le modèle ondulatoire

- Celui-ci interprète facilement les phénomènes de diffraction et d'interférences : la lumière est alors considérée comme une onde électromagnétique de fréquence ν .
- Il faut donc accepter une « dualité onde-corpuscule », où l'énergie E des photons est liée à la fréquence de l'onde par la relation : $E = h\nu$ ($h =$ « constante de Planck »)

1.2.4. Quel modèle utiliser ?

- Lorsque les dimensions des obstacles (objets, diaphragmes...) que rencontre la lumière sont grandes devant sa longueur d'onde λ , le modèle géométrique suffit.
- Dans le cas contraire, et à condition de ne pas être dans une situation où une petite quantité de lumière interagit avec la matière (atome, électron...), on optera pour le modèle ondulatoire : c'est l'objet d'étude du présent chapitre.

II. INTERFERENCES LUMINEUSES

II.1. NOTION DE « VIBRATION LUMINEUSE »

II.1.1. Théorie scalaire de la lumière

- La lumière est donc un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) ; certaines expériences montrent que les détecteurs usuels (rétine, pellicule photo, capteurs CCD...) sont sensibles au seul **champ électrique** \Rightarrow à ce stade, il suffit d'un seul champ vectoriel pour décrire la vibration lumineuse.
- Dans la plupart des expériences d'interférences et de diffraction que nous allons étudier, les « rayons lumineux » (= tubes élémentaires du vecteur de Poynting) qui vont interférer seront **quasi-parallèles** : en un point M donné, les différents champs électriques (correspondant aux différents rayons) seront donc tous pratiquement contenus dans un même plan perpendiculaire à la direction commune de propagation \Rightarrow on pourra toujours les **décomposer** sur des **axes communs** (pour 2 ondes de même polarisation rectiligne, l'axe de projection est unique).

- La « vibration lumineuse » sera donc considérée comme une **grandeur scalaire**, la projection sur un axe commun du vecteur champ électrique : cette grandeur sera notée $\underline{s}(M, t)$.

Rq : pour des ondes non polarisées rectilignement, il suffira de considérer 2 grandeurs scalaires correspondant à 2 axes de projection perpendiculaires entre eux.

- Les détecteurs usuels sont dits « **QUADRATIQUES** » : ils sont sensibles à la valeur moyenne temporelle (sur des temps très supérieurs à la période des ondes lumineuses qui est de l'ordre de quelques 10^{-15} seconde) du **carré** du module des champs électriques.

- On définit alors la grandeur « **ECLAIREMENT** » ou « **INTENSITE LUMINEUSE** » par :

$$E = k \left\langle |\underline{s}|^2 \right\rangle_t = k \left\langle \underline{s} \times \underline{s}^* \right\rangle_t \quad \text{où } k \text{ est une simple constante multiplicative}$$

Rq : l'éclairement s'exprime en $W.m^{-2}$ et est à rapprocher du module du vecteur de Poynting.

II.1.2. Composition de 2 vibrations lumineuses

- Considérons tout d'abord la composition de 2 ondes lumineuses \underline{s}_1 et \underline{s}_2 se propageant selon des directions quasi-parallèles de vecteur unitaire \vec{e}_z ; ces vecteurs étant perpendiculaires à \vec{e}_z , nous allons les projeter sur des axes \vec{e}_x et \vec{e}_y formant avec \vec{e}_z une base orthonormée :

$$\underline{s}_1 = \underline{s}_{1x} \vec{e}_x + \underline{s}_{1y} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{s}_2 = \underline{s}_{2x} \vec{e}_x + \underline{s}_{2y} \vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = (\underline{s}_{1x} + \underline{s}_{2x}) \vec{e}_x + (\underline{s}_{1y} + \underline{s}_{2y}) \vec{e}_y$$

- L'éclairement total est donc proportionnel à :

$(\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1 + \underline{s}_2)^* = [(\underline{s}_{1x} + \underline{s}_{2x}) \vec{e}_x + (\underline{s}_{1y} + \underline{s}_{2y}) \vec{e}_y][(\underline{s}_{1x} + \underline{s}_{2x}) \vec{e}_x + (\underline{s}_{1y} + \underline{s}_{2y}) \vec{e}_y]^* = |\underline{s}_{1x} + \underline{s}_{2x}|^2 + |\underline{s}_{1y} + \underline{s}_{2y}|^2 \Rightarrow$
 l'éclairement total est la **somme** des éclaircements correspondant aux 2 directions de projection \Rightarrow on pourra se contenter d'étudier la composition de 2 vibrations lumineuses de même polarisation rectiligne.

- Avec un choix convenable de l'origine des temps et des ondes harmoniques, on peut écrire en un point M où les 2 ondes se superposent : $\underline{s}_1(M, t) = A_1 \exp(i\omega t)$ et $\underline{s}_2(M, t) = A_2 \exp[i(\omega t - \mathbf{j})]$
 $\Rightarrow \underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = \exp(i\omega t) \times [A_1 + A_2 \exp(-i\mathbf{j})]$ (où \mathbf{j} est une fonction de M)

- L'éclairement total est donc donné par :

$$E(M) = k \left\langle \underline{s} \times \underline{s}^* \right\rangle_t = k \left\langle [A_1 + A_2 \exp(-i\mathbf{j})][A_1 + A_2 \exp(-i\mathbf{j})]^* \right\rangle_t = k \left\langle A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \mathbf{j} \right\rangle_t \Rightarrow$$

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M) + 2\sqrt{E_1E_2} \times \langle \cos \mathbf{j}(M) \rangle_t \quad (1)$$

II.1.3. Notion de « COHERENCE »

- Deux cas peuvent se produire :

♦ $\langle \cos \mathbf{j}(M) \rangle_t = 0$: la formule (1) indique alors que $E(M) = E_1(M) + E_2(M)$

⇒ l'éclairement total est la somme des éclairements obtenus pour chacune des ondes prises séparément : les vibrations lumineuses sont dites « **INCOHERENTES** ».

♦ $\langle \cos \mathbf{j}(M) \rangle_t \neq 0$: les vibrations sont dites « **COHERENTES** », et l'on ne peut se contenter d'une simple addition pour obtenir l'éclairement total.

- En pratique, nous verrons que lorsqu'on est dans ce cas, les 2 ondes ont même intensité, d'où :

$$\text{Si } E_1 = E_2 = E_0 : E(M) = 2E_0[1 + \langle \cos \mathbf{j}(M) \rangle_t] \quad (2)$$

Rq : on constate donc que l'éclairement peut être nul aux points où $\mathbf{j}(M) = (2n+1)\mathbf{p}$, $n \in \mathbb{N}$, et valoir $4E_0$ pour les points où $\mathbf{j}(M) = 2n\mathbf{p}$; l'éclairement n'est pas uniforme dans l'espace, on obtient des « **franges d'interférences** ».

• Dans une source lumineuse telle qu'une lampe à incandescence ou une lampe spectrale, l'émission se fait par « **trains d'ondes** » : un atome est excité de temps en temps, émet un train d'onde de courte durée ($t \approx 10^{-6} \text{ s}$ à 10^{-9} s) en se désexcitant, puis le processus recommence de manière **aléatoire**. Pour 2 **sources lumineuses distinctes**, les trains d'ondes émis auront donc des déphasages relatifs aléatoires : les valeurs moyennes des formules (1) et (2) étant prises sur des temps très longs (par exemple, $\approx 0,1 \text{ s}$ pour la rétine) par rapport à la durée des trains d'ondes, on obtiendra $\langle \cos \mathbf{j}(M) \rangle_t \approx 0 \Rightarrow$ 2 sources lumineuses distinctes sont incohérentes ⇒ il reste à trouver un moyen de rendre cohérentes des sources lumineuses !

II.1.4. Notion d'ordre d'interférence

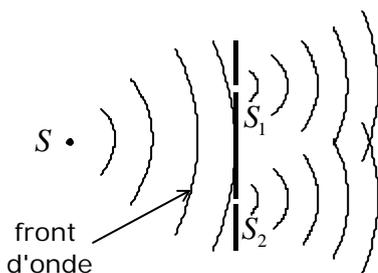
- L'ordre d'interférence p en un point M est défini par :

$$p(M) = \frac{\mathbf{j}(M)}{2\mathbf{p}}$$

- Si p est un **entier**, les interférences sont dites « **constructives** », et l'on obtient les « **franges brillantes** » ; si p est un **demi-entier**, les interférences sont dites « **destructives** » et l'on obtient les « **franges sombres** ».

II.2. INTERFERENCES PAR DIVISION DU FRONT D'ONDE

II.2.1. Fonctionnement de principe en lumière monochromatique



On isole spatialement parties d'un même front d'onde issu d'une **seule source** (S): par exemple, en perçant deux trous dans un écran opaque.

(S_1) et (S_2) constituent alors 2 **sources secondaires** cohérentes : en effet, chaque train d'onde issu de (S) se divise en deux trains d'ondes "jumelés" ayant la même référence de phase.

Il suffit alors de faire se rencontrer les ondes issues des sources secondaires dans une certaine région de l'espace

• On parle pour ce type de dispositif de « **division du front d'onde** ».

• **Rq1** : lorsque la source placée en S est **ponctuelle**, la figure d'interférence est observable dans tout le **volume** où les faisceaux issus de S_1 et S_2 se superposent \Rightarrow on dit que les interférences sont « **NON LOCALISEES** » ; lorsqu'on **étend** progressivement la source, les franges deviennent moins contrastées, et la région dans laquelle les franges restent « assez bien » visibles se réduit : les interférences deviennent « **LOCALISEES** ».

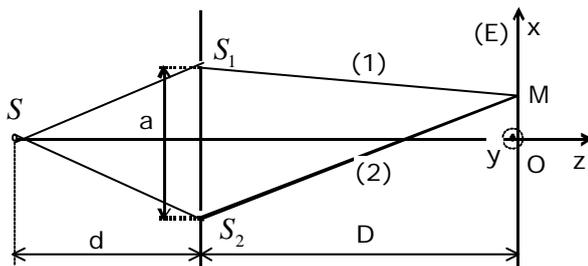
Rq2 : pour une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 , la forme des franges (= lieu des points M de même éclairement) est donnée par $j(M) = cste$; or :

$$j_{2/1}(M) = k_0 \times d_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times d_{2/1}(M) \quad , \quad \text{où } d_{2/1}(M) \text{ est la différence de chemin optique (ou}$$

« différence de marche ») au point M entre les rayons respectivement issus de (2) et de (1).

Dans un milieu d'indice $n \simeq 1$ et pour $SS_1 = SS_2$, il vient : $d_{2/1}(M) = SS_2M - SS_1M = S_2M - S_1M \Rightarrow$ la forme des franges est donnée par $S_2M - S_1M = cste$, ce qui définit une famille d'**hyperboloïdes de révolution d'axe S_1S_2** ; selon la direction d'observation et la taille du champ d'observation, les franges pourront apparaître quasi-rectilignes, circulaires...

II.2.2. Exemple du dispositif des trous d'Young



Dans le dispositif des "trous d'Young", la source principale (S) est située sur la médiatrice du segment joignant les 2 sources secondaires. Les interférences sont observées sur un écran (E).

• En pratique, on aura $D \gg a$ et l'on observera les franges en des points $M(x, y)$ proches de O , c'est-à-dire tels que x et $y \ll D$.

• La différence de chemin optique entre les rayons (2) et (1) vaut :

$d_{2/1}(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (S_2M) - (S_1M) = S_2M - S_1M$, puisque $SS_2 = SS_1$ et que les trajets sont supposés se faire dans un milieu d'indice $n \simeq 1$ (vide, air...) ; il vient alors :

$$d_{2/1}(M) = \sqrt{D^2 + (x + a/2)^2 + y^2} - \sqrt{D^2 + (x - a/2)^2 + y^2} \quad ; \quad \text{au 2ème ordre en } \frac{a}{D}, \frac{x}{D} \text{ et } \frac{y}{D}, \text{ on a :}$$

$$d_{2/1}(M) = D \left[1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{x + a/2}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right] - D \left[1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{x - a/2}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$d_{2/1}(M) \simeq \frac{ax}{D} \quad (3)$$

et

$$E(M) = 2E_0 \times \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{ax}{D} \right) \right] = 4E_0 \times \cos^2 \left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 D} \right)$$

\Rightarrow à cet ordre d'approximation, les franges sont données par $x = cste$ et apparaissent donc **rectilignes, parallèles** à l'axe Oy .

- Sur l'écran, les franges de même nature seront séparées d'une distance $i = \Delta x$ telle que :

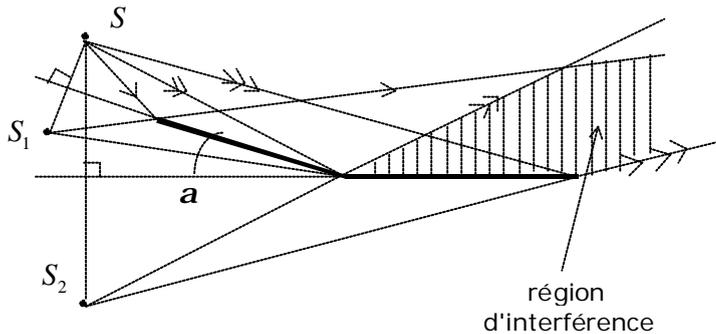
$$\Delta \left(\frac{2pax}{I_0 D} \right) = \frac{2pa}{I_0 D} \times \Delta x = 2p \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{I_0 D}{a}} \quad \text{Rq : } i \text{ est appelé « interfrange »}$$

- **Rq1** : les trous S, S_1 et S_2 peuvent être remplacés par des fentes (de très faible largeur selon Ox) **parallèles à Oy** ; en effet, les atomes (de position y différente) de la source placée derrière la fente (S) émettent des trains d'ondes incohérents entre eux \Rightarrow on peut sommer sur l'écran les éclairissements dus à chacun de ces atomes. L'éclairissement ne dépendant pas de la variable y , les intensités lumineuses vont se renforcer, sans se brouiller : le phénomène sera plus « lumineux ».

Rq2 : D est de l'ordre de grandeur du mètre, a du millimètre et I_0 du micromètre \Rightarrow l'**interfrange** i est de l'ordre du **millimètre** ; c'est ainsi que pour la première fois, Thomas Young pu mesurer en 1804 des longueurs d'onde de radiations lumineuses.

II.2.3. Autres dispositifs diviseurs du front d'onde

- Décrivons le dispositif des « miroirs de Fresnel » :



Il s'agit de 2 miroirs plans, formant un dièdre d'angle très petit. La source S éclaire les miroirs sous incidence rasante.

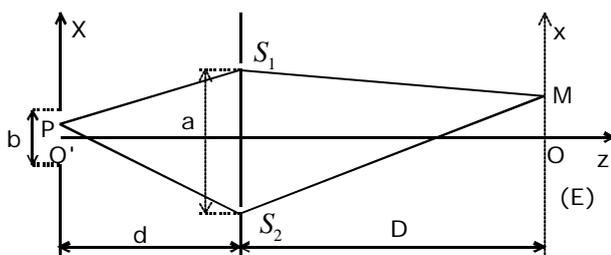
S_1 et S_2 sont les images de S , donc symétriques de S par rapport aux plans des miroirs: tout se passe comme si les rayons provenaient de 2 sources secondaires, cohérentes entre elles puisque situées sur un même front d'onde issu de S .

- Les points S, S_1, S_2 sont situés sur un cercle de rayon R , où R est la distance de la source S à l'arête du dièdre ; on montre que : $\boxed{S_1 S_2 = a = 2R \sin a \approx 2Ra}$

\Rightarrow on peut alors appliquer la relation (3) pour reconnaître des franges rectilignes, parallèles à l'arête du dièdre (ceci dans la région où les faisceaux issus de S_1 et S_2 se superposent).

- Nous verrons (exercice 30.7) un autre dispositif « diviseur d'onde » n'utilisant qu'un seul miroir (« miroir de Lloyd »).

II.2.4. Problème de la cohérence spatiale



Dans le dispositif des "fentes d'Young" utilisé en lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 , nous allons nous intéresser à l'**influence** de la **largeur b de la fente source** selon l'axe O'X. Les atomes de la lampe placée derrière les éléments de surface de la fente source sont **incohérents** entre eux : on pourra donc se contenter de sommer les éclairissements dus à chacun de ces éléments de surface .

- Nous allons découper la fente source en « bandes » de largeur élémentaire dX , parallèles à l'axe Oy ; pour chacune de ces sources élémentaires, il y aura **interférence** à travers les sources secondaires S_1 et $S_2 \Rightarrow$ on peut écrire :

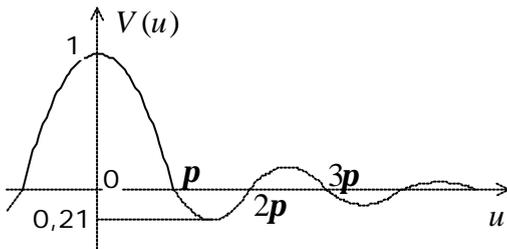
$dE(M) = K(1 + \cos j_{2/1})dX$, qui exprime la contribution de l'élément de largeur dX à l'éclairement total au point M de l'écran (E) ; $j_{2/1} = 2p \frac{d_{2/1}}{l}$ est le déphasage au point M entre les rayons issus du point P, et passés respectivement par les fentes (S_2) et (S_1).

- Dans l'exercice 30.1, nous montrerons que $d_{2/1} = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D}$, et qu'après intégration selon X, l'éclairement a pour expression :

$$E(M) = 2E_0 \left[1 + \left(\frac{\sin u}{u} \right) \cos \left(\frac{2pax}{l_0 D} \right) \right] \quad \text{avec :} \quad u = \frac{pab}{l_0 d}$$

- On posera : $V(u) = \frac{\sin u}{u} = \text{sin}_c(u) = \text{"sinus cardinal de } u\text{"} = \text{« facteur de visibilité »}$

- L'allure de la courbe $V(u)$ est la suivante :



On peut également définir le "**contraste**" selon:

$$C(u) = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \left| \frac{\sin u}{u} \right| = |V(u)|$$

- **Commentaires** : pour $u = p$, le contraste s'annule pour la 1^{ère} fois et l'écran est uniformément éclairé ; pour $p < u < 2p$, le facteur de visibilité est **négatif**: les franges sombres occupent la position des franges brillantes lorsque $u < p$ (on dit qu'il y a « inversion du système de franges »).

De toute manière, le contraste diminue lorsque u augmente, donc lorsque la largeur b de la fente source augmente : le critère de finesse de la fente source est sévère, puisqu'en pratique b ne doit guère excéder 0,1mm.

II.2.5. Problème de la cohérence temporelle

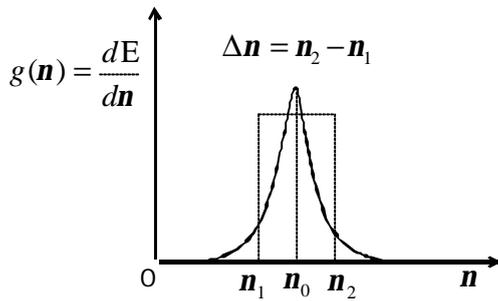
- Une source n'est jamais parfaitement monochromatique :
 - ♦ la théorie de la Transformation de Fourier montre qu'à un **train d'onde de durée finie t** correspond un **élargissement spectral** de largeur :

$$\Delta n \approx \frac{1}{t}$$

Rq : Δn peut varier de 10^{10} Hz (lampe spectrale) à 10^5 Hz (laser monomode)

- ♦ l'effet Doppler (les atomes émettant les trains d'ondes sont en mouvement par rapport au référentiel du labo) et les collisions entre atomes pendant l'émission du train d'onde contribuent à élargir la raie.

- Nous allons représenter la « **densité spectrale** » de la source $g(n) = \frac{dE}{dn}$, qui représente la contribution de la bande de fréquences de largeur dn à l'éclairement total ; soit :



La radiation émise par la source a un "profil" quelconque qu'il faut modéliser: pour simplifier les calculs, on assimile le profil spectral à un rectangle, de même surface que le profil réel .

Deux radiations de fréquences différentes ne peuvent interférer: on peut définir un déphasage instantané entre ces ondes, mais la valeur moyenne temporelle de ce déphasage sera nul.

On sommera donc les éclairissements de chaque bande de fréquences de largeur dn (chacune interférant après division du front d'onde à travers les sources secondaires).

- En considérant le dispositif des fentes d'Young (avec fentes infiniment fines), on peut écrire :

$$E(M) = \int_{n_1}^{n_2} K \left[1 + \cos\left(\frac{2pax}{1D}\right) \right] dn = \int_{n_1}^{n_2} K \left[1 + \cos\left(\frac{2paxn}{cD}\right) \right] dn$$

- Après calculs (voir l'exercice 30.2) et en posant $I_0 = \frac{c}{n_0}$ on obtient :

$$E(M) = 2E_0 \left[1 + V(u) \times \cos\left(\frac{2pax}{I_0 D}\right) \right] \quad \text{avec :} \quad V(u) = \frac{\sin u}{u} \quad u = \frac{pax(n_2 - n_1)}{cD} = \frac{pax\Delta n}{cD}$$

- Interprétation** : il apparaît un nouveau facteur de visibilité (de même forme mathématique que le précédent), qui est d'autant plus faible que le profil spectral est large ; on constate que le

contraste reste acceptable tant que $u < p \Rightarrow \frac{pax\Delta n}{cD} < p \Rightarrow \frac{ax}{D} < \frac{c}{\Delta n} = ct$, où t est la durée

moyenne d'un train d'onde \Rightarrow il faut que: $d_{2/1}(M) = \frac{ax}{D} < L = ct$ (L = longueur d'un train d'onde)

Ceci signifie que plus on s'éloigne de O sur l'écran, plus la différence de marche augmente et plus les 2 trains d'ondes « jumeaux » issus de S_1 et S_2 se décalent : si d continue d'augmenter, et les 2 trains d'ondes finissent par se rater et ne plus interférer \Rightarrow cette zone de l'écran devient uniformément éclairée, ce qui correspond bien à un contraste nul.

Rq1 : t est également appelée « durée de cohérence », L étant la « longueur de cohérence ».

Rq2 : l'expression du facteur de visibilité suggère qu'il y a réapparition d'un contraste (même faible) pour $u > p$, alors que la théorie des trains d'ondes l'interdit ; expérimentalement, on n'observe pas cette réapparition \Rightarrow c'est la modélisation de la raie par un profil rectangulaire qui est trop grossière (avec un profil gaussien, les prédictions sont mieux vérifiées). Le modèle simpliste nous a néanmoins permis de prédire l'annulation du contraste pour $u \approx p$.

II.2.6. Utilisation de ces dispositifs en lumière « blanche »

- Encore une fois, ce sont les éclairissements qui vont s'ajouter, puisque les différentes radiations composant la lumière blanche ne peuvent interférer entre elles.
- Au centre de la figure d'interférence, la différence de marche est nulle, quelle que soit la longueur d'onde \Rightarrow on observe une frange « d'ordre zéro » **brillante** et **achromatique**.
- Cette frange brillante sera bordée de 2 franges sombres.

- L'interfrange vaut $i = \frac{I_0 D}{a}$ et est donc minimum pour le violet, maximum pour le rouge \Rightarrow plus

on s'éloigne du centre, plus les systèmes de franges se décalent \Rightarrow les 2 franges brillantes suivantes sont **irisées**, le bord violet étant tourné vers la frange d'ordre 0.

- Le processus s'amplifie au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre ; on finit par obtenir un brouillage des franges et l'on observe un « **blanc d'ordre supérieur** » (blanc « sale », nettement moins lumineux que celui de la frange achromatique).

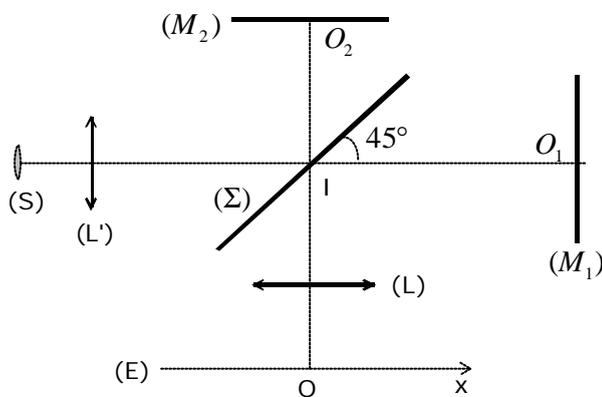
- Si l'on observe un point d'abscisse x de ce blanc d'ordre supérieur avec un spectroscope, on constate que sur un fond coloré (arc-en-ciel) apparaissent des cannelures noires correspondant à des longueurs d'ondes manquantes : ce sont celles pour lesquelles les interférences sont destructives, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$j_{2/1} = \frac{2pax}{I_0 D} = (2k + 1)p$$

On parle de « **spectre cannelé** ».

II.3. INTERFERENCES PAR DIVISION D'AMPLITUDE

II.3.1. Description de l'interféromètre de Michelson



Une source (S) est placée au foyer d'une lentille collimatrice.

Le faisceau issu de (S) est divisé en par la lame semi-réfléchissante (Σ), appelée "**séparatrice**".

Il suffit alors de faire se superposer les rayons transmis et réfléchi par l'intermédiaire de miroirs. Le miroir (M_2) est fixe, l'autre est monté sur un **chariot mobile**; l'orientation des miroirs peut se régler par rotation autour d'un axe vertical et d'un axe horizontal.

L'observation peut se faire grâce à une lentille de projection sur un écran (E).

On parle de " **DIVISION D'AMPLITUDE** "

- La séparatrice est une lame de verre, métallisée sur l'une de ses faces (ici, nous supposons qu'il s'agit de celle tournée vers le miroir M_1) ; le rayon réfléchi par la face métallisée de la séparatrice traverse donc 3 fois cette dernière, alors que le rayon transmis ne la traverse qu'une seule fois : pour que la différence de marche entre les 2 rayons soit nulle lorsque la distance IO_1 est égale à IO_2 , on introduit entre (Σ) et (M_1) une lame de verre non réfléchissante destinée à compenser la différence de trajet. Cette lame « **compensatrice** » devra être réglée au préalable à toute expérience, de manière à être rigoureusement parallèle à la séparatrice.

- La symétrie plane conservant les distances, le rayon réel transmis par la séparatrice, puis réfléchi par le miroir (M_1) et enfin réfléchi par la séparatrice, pourra être remplacé par un rayon **virtuel** réfléchi par la séparatrice, puis réfléchi par un **miroir virtuel (M_1') symétrique de (M_1) par rapport à la séparatrice**, et enfin transmis par cette séparatrice.

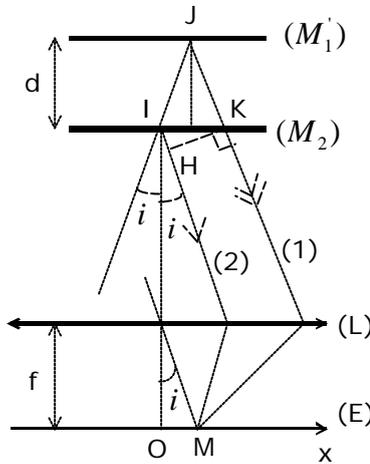
- Si la source (S) était ponctuelle, alors les interférences seraient non localisées (comme avec les dispositifs à division du front d'onde) : les sources réelles étant étendues, il va y avoir localisation des franges, et ceci plus « **brutalement** » qu'avec les dispositifs du type fentes d'Young.

En revanche, et c'est un avantage pour la luminosité du phénomène, on peut **étendre largement la source sans dégrader le contraste**, à condition d'observer les franges là où elles sont localisées, ce que nous allons découvrir dans les 2 exemples suivants.

- Signalons enfin que l'interféromètre de Michelson permet de mesurer des distances macroscopiques à une fraction de longueur d'onde près, de déterminer des indices (par interposition d'une lame d'épaisseur connue sur l'un des « bras » de l'interféromètre), de résoudre un doublet comme celui du sodium etc ...

11.3.2. Utilisation en lame d'air : franges d'égale inclinaison

Dans ce cas, les miroirs réels (M_1) et (M_2) sont **perpendiculaires** entre eux \Rightarrow les miroirs (M_1') et (M_2') sont **parallèles** ; nous allons raisonner sur la figure ci-dessous :



A cause de l'étendue de la source, les rayons étudiés font un angle i , qui reste très faible, avec l'axe du système. Sur cette figure, la séparatrice et la compensatrice n'ont pas été représentées, car elles sont supposées réglées parfaitement et n'introduisent aucun déphasage.

Le miroir réel et le miroir virtuel constituent une lame d'air à faces parallèles, d'où le nom de ce type de réglage.

On constate que les rayons (1) et (2) ressortent parallèles, ils vont donc **interférer à l'infini** qui est le lieu de localisation des franges : on pourra les observer sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille convergente.

- D'après le théorème de Malus, toute différence de marche acquise avant le plan passant par les points H et K, est conservée par la suite ; on a donc : $d_{1/2} = (IJK) - (IH) = 2IJ - IH$.
- Les calculs montrent (voir exercice 30.10) que l'on obtient :

$$d_{1/2} = 2d \cos i = 2d \left(1 - \frac{x^2}{2f^2} \right) \quad (\text{au } 2^{\text{ème}} \text{ ordre en } i) \quad \Rightarrow \quad E(M) = E_{\max} \times \cos^2 \left[\frac{2pd}{I_0} \left(1 - \frac{x^2}{2f^2} \right) \right]$$

- La forme des franges est donnée par $E(M) = cste \Rightarrow x = cste$: ici, x représente une distance de point à point \Rightarrow les franges sont des **anneaux de centre O** (pour une source ayant la symétrie de révolution).
- Comme ces franges correspondent également à un angle i fixé (angle sous lequel on voit un point de la source depuis le centre de la lentille de collimation (L')), on dit que l'on observe des « **franges d'égale inclinaison** ».

Rq1 : l'ordre d'interférence au centre vaut $p(0) = \frac{2d}{I_0}$, et est donc quelconque ; si $p(0)$ est un **entier**, la figure est à **centre brillant** et si $p(0)$ est un **demi-entier**, elle est à centre noir.

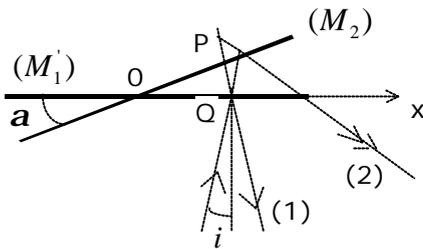
Rq2 : attention, l'ordre d'interférence $p(i) = \frac{2d \cos i}{I_0}$ **diminue** lorsqu'on **s'éloigne du centre** (c'est le contraire dans le cas des fentes d'Young) !

Rq3 : à un anneau donné, correspond un ordre d'interférence fixé \Rightarrow si l'on diminue la distance d , $\cos i$ va augmenter \Rightarrow l'angle i va diminuer \Rightarrow les anneaux vont se contracter et disparaître par le centre ; corrélativement, le rayon du k -ème anneau (brillant par exemple) visible sur l'écran augmente \Rightarrow on verra de moins en moins d'anneaux sur l'écran.

Ces résultats sont particulièrement utiles dans la recherche du « contact optique », c'est-à-dire l'obtention de $d = 0$ (voir exercice 30.10).

11.3.3. Utilisation en coin d'air : franges d'égale épaisseur

A partir de la situation précédente et avec $d = 0$, faisons pivoter l'un des miroirs d'un angle α :



On constate que les rayons (1) et (2) se croisent **virtuellement** au point P; pour la clarté de la figure, les angles **a** et **i** ont été fortement exagérés (l'éclairage des miroirs se fait sous incidence quasi-normale) : P étant au voisinage immédiat des miroirs, les franges sont **localisées sur les miroirs** (quasiment confondus).

- Dans cette configuration, on dit que le Michelson est réglé en « **coin d'air** ».
- Le calcul de la différence de marche $d_{2/1}$ est assez laborieux ; pour des angles **a** et **i** très petits (ce qu'ils sont en pratique), il vient à l'ordre 1 : $d_{2/1} \approx 2e(x)$, où $e(x)$ est la distance entre les 2 miroirs au niveau du point Q d'abscisse x , comptée à partir de l'arête du dièdre formé par ces miroirs ; on a donc :

$$\boxed{d_{2/1} = 2x \tan a \approx 2xa} \Rightarrow \text{on en déduit l'ordre d'interférence : } \boxed{p(x) = \frac{2xa}{I_0}}$$

- La forme des franges est donnée par $p(x) = cste \Rightarrow x = cste \Rightarrow$ les franges sont **rectilignes, parallèles à l'arête du dièdre formé par les miroirs** ; puisque l'éclairement est constant pour une distance $e(x)$ entre les miroirs constante, on dit que l'on observe des « **franges d'égal épaisseur** ».

- On peut calculer l'interfrange selon : $\Delta p(x) = 1 = \frac{2a\Delta x}{I_0} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{I_0}{2a}}$

Rq : cette dernière relation permet de contrôler le parallélisme des miroirs, puisque les **franges s'éloignent** les unes des autres lorsque l'angle **a diminue**.

III. DIFFRACTION A L' INFINI

III.1. PRINCIPE D' HUYGENS – FRESNEL

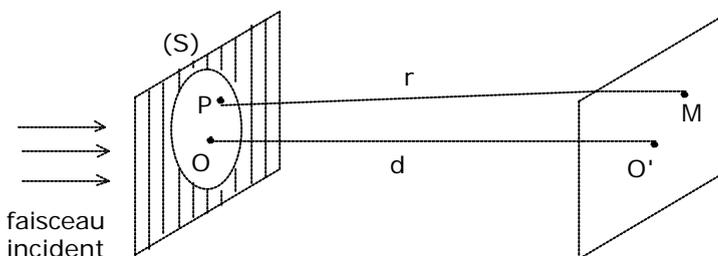
III.1.1. Enoncé

« Chaque point P d'une surface (S) atteinte par un faisceau lumineux peut être considéré comme une **source secondaire fictive** émettant une onde **sphérique**.

L'amplitude de la vibration lumineuse de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en P et à l'élément de surface dS entourant le point P.

Enfin, les sources fictives sont **cohérentes** : les ondes émises par ces sources secondaires **interfèrent** donc entre elles ».

III.1.2. Expression mathématique du Principe



On considère un écran opaque percé d'une ouverture (S).

L'amplitude complexe en M de la vibration lumineuse s'écrit :

$$\underline{g}(M) = \iint_S K \times \underline{g}(P) \times \frac{\exp[-ij(r)]}{r} \times dS$$

Rq : $\underline{j}(r) = kr = \frac{2\pi r}{I_0}$ représente le déphasage subi par l'onde pour aller de P en M ; le terme en

$1/r$ traduit le fait que les sources fictives sont sphériques.

• **Hypothèses simplificatrices :**

- ♦ la distance moyenne d qui sépare l'écran du plan d'observation est très supérieure à OP et $O'M$ \Rightarrow on pourra confondre $1/r$ avec $1/d$.
- ♦ le facteur de proportionnalité K est une **constante** (dans certaines situations, on pourra être amené à introduire un « facteur de transmittance » $K(P)$, traduisant l'hétérogénéité de structure du diaphragme de section S).

- Dans ces conditions, l'état vibratoire en M peut se réécrire :

$$\underline{s}(M) = A \times \iint_S \underline{s}(P) \exp[-i\mathbf{j}(r)] dS \quad \text{avec :} \quad \mathbf{j}(r) = kr = \frac{2\pi r}{\lambda_0}$$

Rq1 : il est important de signaler que l'on ne peut pas confondre $\frac{2\pi r}{\lambda_0}$ avec $\frac{2\pi d}{\lambda_0}$, car même pour de faibles variations de r (à notre échelle), le terme de phase $\mathbf{j}(r)$ peut considérablement varier, compte tenu de l'extrême petitesse de la longueur d'onde λ_0 .

Rq2 : on remarquera que les hypothèses $d \gg O'M$ et $d \gg OP$ impliquent un quasi-parallélisme des rayons diffractés et confortent donc l'utilisation du modèle **scalaire** de la lumière.

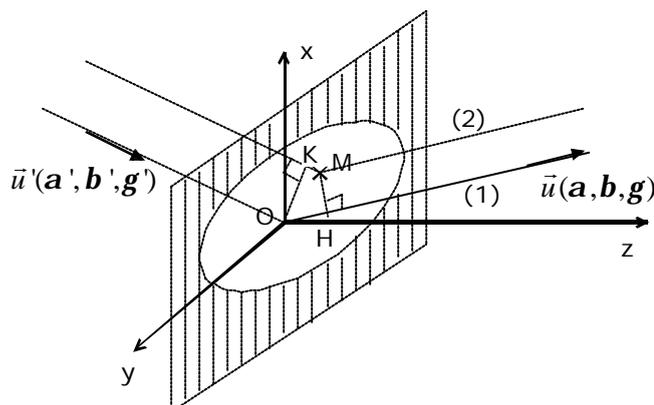
Rq3 : le principe d'Huygens-Fresnel n'est pas complètement satisfaisant dans la mesure où il ne prend pas en compte l'interaction de la lumière (qui est un champ électromagnétique) avec les bords du diaphragme ; les conditions aux limites imposées au champ dépendent en fait de la nature du matériau entourant l'ouverture (métal, diélectrique...).

Ces **effets de bord** pourront être **négligés** lorsque les **dimensions du diaphragme** seront suffisamment **grandes par rapport à la longueur d'onde** λ_0 utilisée.

III.1.3. Distinction « diffraction à distance finie » ou « diffraction à l'infini »

- Lorsque d reste finie, on parle de « diffraction à distance finie » ou « diffraction de Fresnel ».
- Lorsque $d \rightarrow \infty$, on parle de « diffraction à l'infini » ou « diffraction de Fraunhofer » : les calculs sont plus simples et l'on étudiera le phénomène dans une **direction** \vec{u} ; en pratique, les observations se feront dans le **plan focal** d'une **lentille convergente**.

III.1.4. Diffraction à l'infini d'une onde plane par un diaphragme plan



On considère une onde plane harmonique, de direction \vec{u}' , arrivant sur un diaphragme plan, de surface (S) , percé dans un écran opaque.

L'origine du repère de projection est prise au point O de l'ouverture, M étant un point courant du diaphragme.

On s'intéresse à la diffraction de l'onde dans une direction \vec{u} .

Le point K est la projection orthogonale du point O sur le rayon (2) arrivant en M , puis diffracté ; le point H est la projection du point M sur le rayon (1), diffracté en O .

- D'après le théorème de Malus, le plan passant par les points O et K est un plan d'onde \Rightarrow les ondes sont en phase au niveau de ces points ; par ailleurs, toute différence de marche acquise avant le plan passant par les points H et M est conservée par la suite.

La différence de marche à l'arrivée entre le rayon (2) et le rayon (1) vaut donc :

$$d_{2/1} = KM - OH = \vec{u}' \cdot \overline{OM} - \vec{u} \cdot \overline{OM} \Rightarrow \text{le déphasage s'écrit : } \boxed{j_{2/1} = 2p \frac{d_{2/1}}{l_0} = (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \overline{OM}}$$

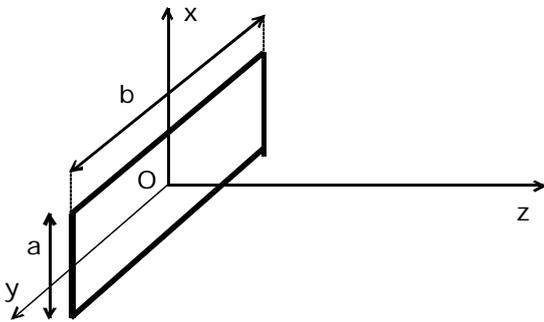
- L'application du Principe de Huygens-Fresnel conduit à :

$$\underline{s}(\vec{u}) = A_{\underline{s}_0}(\vec{u}) \times \iint_S \exp[-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \overline{OM}] dS = A_{\underline{s}_0}(\vec{u}) \times \iint_S \exp\{i \times \frac{2p}{l_0} [(\mathbf{a} - \mathbf{a}')x + (\mathbf{b} - \mathbf{b}')y]\} dx dy$$

où $\underline{s}_0(\vec{u})$ est l'amplitude de l'onde diffractée par le point O, dans la direction \vec{u} .

III.2. EXEMPLE D'UNE OUVERTURE RECTANGULAIRE

III.2.1. Expression de l'éclairement



On intègre la relation précédente sur une ouverture rectangulaire (largeur a et longueur b), en remarquant que les variables x et y sont **indépendantes**.

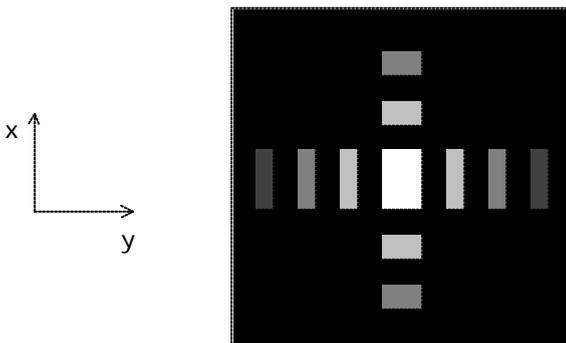
Les calculs (développés dans le corrigé de l'exercice 30.3) montrent que l'on obtient pour l'amplitude :

$$\underline{s}(\vec{u}) = A_{\underline{s}_0}(\vec{u}) ab \times \text{sinc}(v) \times \text{sinc}(w) \quad \text{avec : } \boxed{v = \frac{p(\mathbf{a} - \mathbf{a}')a}{l}} \quad \text{et} \quad \boxed{w = \frac{p(\mathbf{b} - \mathbf{b}')b}{l}}$$

- On en déduit l'éclairement dans la direction \vec{u} :

$$\boxed{E(\vec{u}) = \langle \underline{s} \times \underline{s}^* \rangle_t = A^2 |\underline{s}_0|^2 a^2 b^2 \times \text{sinc}^2(v) \times \text{sinc}^2(w) = E_{\max} \times \text{sinc}^2(v) \times \text{sinc}^2(w)} \quad \text{où : } \boxed{E_{\max} = (A |\underline{s}_0| ab)^2}$$

- Les résultats principaux sont résumés ci-dessous :



On obtient une sorte de **croix** : presque toute l'intensité lumineuse se retrouve dans la tache centrale.

Selon un axe donné, cette dernière est **fois plus large** que les autres.

Le phénomène de diffraction est le **plus marqué** dans la direction où la fente est la **plus étroite**. Pour une direction d'observation \vec{u} restant proche de la direction d'incidence \vec{u}' , les dimensions **angulaires** de la tache centrale sont :

$$\left(\frac{2l_0}{b}, \frac{2l_0}{a} \right)$$

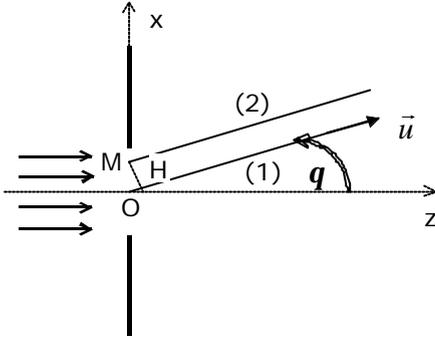
Rq : compte tenu des propriétés de la fonction « sinus cardinal » (cf. paragraphe II.2.4), on peut calculer l'intensité des taches relativement à celle de la tache centrale ; pour les 4 taches les plus voisines, cette intensité relative est de 4,7% et elle tombe à 1,6% pour les 4 suivantes.

III.2.2. Cas limite d'une fente « fine »

- On s'intéresse au cas fréquent où l'une des dimensions de l'ouverture est très inférieure à l'autre ; ici, on considèrera que : $\boxed{a \ll b}$

- Selon la direction Oy, et pour $b \gg I_0$, les taches se rapprochent et se confondent en une tache centrale unique ; on se contente donc d'étudier le phénomène dans le plan xOz \Rightarrow on sera dans une situation où : $y=0 \Rightarrow w=0 \Rightarrow \sin_c(w)=1$

- D'où :



L'étude de la figure ci-contre et la simplification de la relation du paragraphe III. . obtenue pour l'éclairement permettent d'écrire:

$$E(q) = E_{\max} \times \sin^2_c(v)$$

avec:

$$v = \frac{p a a}{I_0} = \frac{p a \sin q}{I_0}$$

- L'éclairement s'annule pour : $v = p\pi$, avec $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sin q = p \frac{I_0}{a}$

Rq : la tache centrale a une largeur **angulaire** $\frac{2I_0}{a}$, qui est donc bien le double de celle des taches secondaires (pour de petits angles, on peut en effet confondre q et $\sin q$).

- Par ailleurs, $E(q)$ est extremum pour $\frac{dE(v)}{dv} = 0 = 2 \left(\frac{\sin v}{v} \right) \times \left(\frac{v \cos v - \sin v}{v^2} \right) \Rightarrow \frac{dE(v)}{dv} = 0$ pour :
 - ♦ $\sin v = 0$ ($v \neq 0$) : ce sont les minimums précédents.
 - ♦ $\tan v = v$: graphiquement, on trouve que ces maximums secondaires sont voisins de

$$v_p = (2p+1) \frac{\pi}{2}$$

avec $p \in \mathbb{N}^* - \{-1\} \Rightarrow |\sin v_p| \approx 1 \Rightarrow$

$$E(v_p) \approx E_{\max} \times \frac{4}{p^2 (2p+1)^2}$$

A.N : $E(v_1) \approx 4,7\%$ et $E(v_2) \approx 1,6\%$

Rq : on constate que pour $a = I_0$, la tache centrale occupe tout l'espace angulaire, puisque ses limites sont données par $q = \pm \arcsin\left(\frac{I_0}{a}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$; mais que se passe-t-il pour $a < I_0$?

Il faut avoir conscience que pour de tels angles, les rayons sont fortement inclinés par rapport à l'axe optique et que le modèle scalaire de la lumière ne s'applique plus correctement ; d'autre part, on ne peut plus négliger les effets de bord (interaction du champ électrique avec le diaphragme) : on met en évidence les insuffisances du Principe de Huygens-Fresnel.

Cependant, l'expérience confirme la très large diffraction de la lumière par une fente fine de largeur $a \approx I_0$ ou $a < I_0$.

III.3. CAS D'UNE OUVERTURE CIRCULAIRE

- C'est un cas très fréquent en diffraction, car la **monture** des **lentilles** ou des **miroirs** utilisés dans les instruments d'optique (appareils photographiques, télescopes...) sont généralement **circulaires**.
- La figure de diffraction obtenue a la symétrie de révolution : elle se compose d'anneaux (alternativement sombres et brillants), entourant une tache centrale beaucoup plus brillante, qui porte le nom de « **TACHE D'AIROY** ».

- Les limites angulaires de la tache d'Airy sont données par :

$$\sin q_L = 1,22 \times \frac{I_0}{D} \quad \text{où } D \text{ est le } \mathbf{diamètre} \text{ du diaphragme circulaire)}$$

Rq : si E_{\max} est l'éclairement au centre de la tache d'Airy, celui correspondant au premier anneau brillant n'est plus que de $1,75\% \times E_{\max}$.

III.4. DIFFRACTION ET LIMITATIONS D'UN SYSTEME OPTIQUE

- **Optimisation d'un système optique :** à cause de la diffraction, même un système optique rigoureusement stigmatique donnerait d'un point objet une image non ponctuelle (tache d'Airy pour les diaphragmes circulaires) ; finalement, c'est la « régularité » de la figure de diffraction obtenue qui fournira un critère de « perfection » d'un système optique : cette démarche, associée à une automatisation des contrôles, a effectivement été utilisée pour réduire la durée de polissage des 4 miroirs de 8 mètres du Very Large Telescope implanté au Chili.

Pour quantifier la qualité d'un instrument d'optique, on utilise encore couramment le « **critère de Rayleigh** » ; l'instrument sera considéré comme « parfait » si les différences de marche d entre les rayons (introduites par les défauts de centrage, de polissage...) obéissent à :

$$|d| < \frac{I_0}{4}, \quad \text{ce qui donne dans le visible } d < 150 \text{ nm}$$

Rq : pour les miroirs du V.L.T, le polissage a été réalisé à 10 nm près !

- **Pouvoir de résolution d'un instrument d'optique :** deux points objets (deux étoiles par exemple) donnent deux figures de diffraction, que l'on pourra « séparer » si les taches de diffraction centrales n'empiètent « pas trop » l'une sur l'autre ; toujours selon Rayleigh, la **limite de résolution** d'un instrument d'optique est telle que le **bord de l'une des taches centrales passe par le centre de l'autre**.

Ainsi, dans le cas d'un télescope, on ne pourra séparer deux étoiles que si leur distance angulaire a est $\geq 1,22 \times \frac{I_0}{D}$ (ceci restant une limite théorique, car il faut prendre en compte les problèmes liés à l'atmosphère terrestre, en particulier ses turbulences).

IV. RESEAUX PLANS

IV.1. GENERALITES

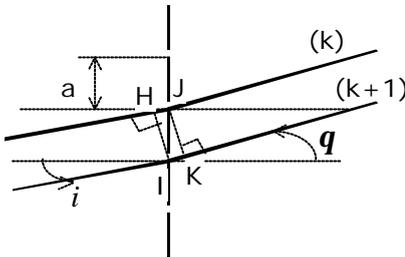
IV.1.1. Définitions

- Les réseaux couramment utilisés consistent en un ensemble de fentes fines, parallèles et équidistantes, situées dans un même plan et séparées par des intervalles opaques ; ces fentes sont les « **traits** » du réseau, la distance entre deux fentes successives étant sa « **période** ».
- Chaque fente diffracte la lumière incidente et les ondes diffractées interfèrent entre elles : on parle « **d'interférences à ondes multiples** ».

IV.1.2. Différents types de réseaux plans

- On peut également fabriquer des réseaux par **réflexion** : des traits noirs sont gravés sur une surface métallique polie, ce qui permet la diffraction d'un rayonnement U.V par le réseau de petits miroirs ainsi réalisé (rappelons que le verre usuel est opaque aux U.V).
- Finalement, toute structure plus ou moins périodique qui diffracte une onde incidente constitue un réseau : les atomes d'un réseau cristallin est un réseau à 3 dimensions pour les rayons X ; plus anecdotique, les sillons d'un CD jouent le même rôle et dispersent la lumière blanche.

IV.2. ETUDE QUANTITATIVE

 IV.2.1. Différence de marche entre 2 rayons voisins


On considère un réseau plan comportant au total N fentes, régulièrement espacées d'une distance a .
 Il est éclairé par un faisceau parallèle, sous une incidence i .
 L'observation se fait à l'infini (dans le plan focal d'une lentille convergente).
 Dans un premier temps, les fentes sont supposées infiniment fines.

- Dans ces conditions, on sait que l'amplitude de l'onde diffractée par chacune des fentes varie très peu en fonction de q : pour simplifier, on la considérera comme constante.
- Un raisonnement identique à celui du paragraphe III.1.4 conduit à :

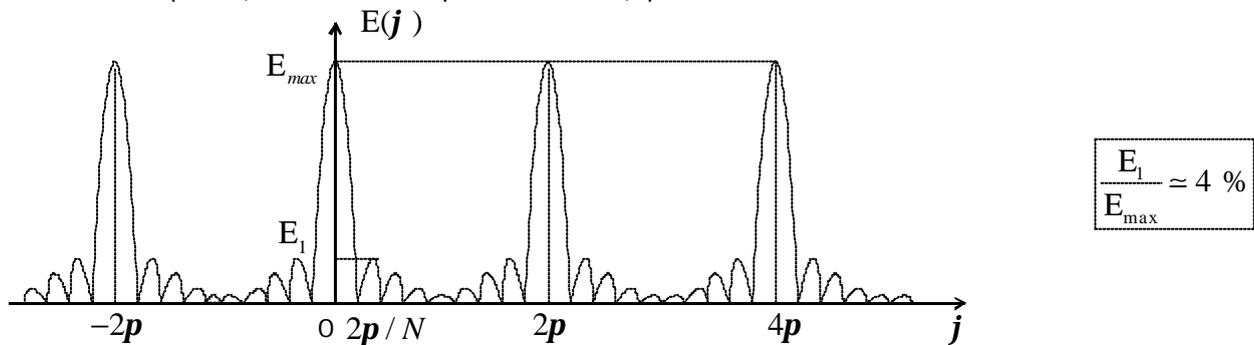
$$\boxed{d_{K+1/K} = IK - HJ = a(\sin q - \sin i)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{j_{K+1/K} = j = \frac{2pd}{I_0} = \frac{2pa}{I_0} (\sin q - \sin i)}$$

 IV.2.2. Expression de l'éclairement

- En notant $\underline{s}_1 = A \exp(i\omega t)$ l'amplitude complexe de l'onde diffractée par la première fente, puis en sommant les diverses amplitudes pour obtenir l'amplitude résultante \underline{s}_{tot} , on aboutit à l'expression de l'éclairement dans une direction q (voir exercice 30.4) :

$$\boxed{E(j) = \langle \underline{s}_{tot} \times \underline{s}_{tot}^* \rangle_t = A^2 \times \frac{\sin^2(Nj/2)}{\sin^2(j/2)} = (NA)^2 \times \frac{\sin^2(Nj/2)}{N^2 \sin^2(j/2)} = E_{max} \times \frac{\sin^2(Nj/2)}{N^2 \sin^2(j/2)}}$$

- Une étude rapide (en tenant compte de $N \gg 1$) permet de tracer la courbe de l'éclairement :



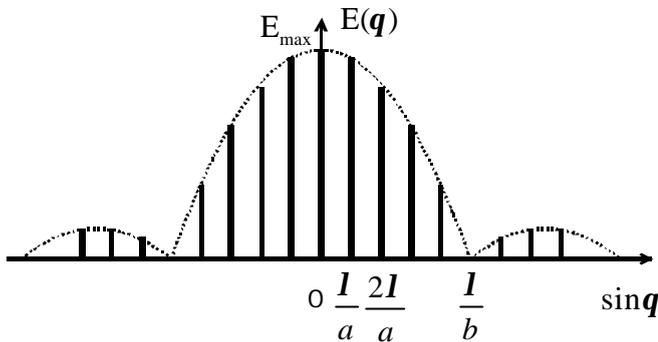
Rq1 : à l'échelle réelle, les maximums secondaires obtenus pour $j = 2pp/N$ ($p \neq 0, p \neq N$) sont pratiquement imperceptibles.

Rq2 : en tenant compte d'une largeur des fentes b finie, on doit faire apparaître le terme de diffraction dans l'expression de l'amplitude ; ainsi :

$$\underline{s}_1(q) = A(q) \exp(i\omega t) = A_{max} \times \sin_c \left(\frac{pb \sin q}{l} \right) \times \exp(i\omega t) \Rightarrow \text{l'éclairement devient :}$$

$$\boxed{E(q) = (NA_{max})^2 \times \sin_c^2 \left(\frac{pb \sin q}{l} \right) \times \frac{\sin^2 \left(\frac{Npa \sin q}{l} \right)}{N^2 \times \sin^2 \left(\frac{pa \sin q}{l} \right)} = E_{max} \times \sin_c^2 \left(\frac{pb \sin q}{l} \right) \times \frac{\sin^2 \left(\frac{Npa \sin q}{l} \right)}{N^2 \times \sin^2 \left(\frac{pa \sin q}{l} \right)}}$$

Pour un angle d'incidence $i=0$, on obtient l'allure de courbe suivante :



Rq: seuls les maximums principaux ont été représentés.

Conséquence pratique :

Les maximums d'ordre **élevé** sont de **moins en moins lumineux**.

IV. 2.3. Application pratique : spectroscopie à réseau

- La position angulaire des maximums principaux est donnée par $j = 2kp$ ($k \in \mathbb{Z}$), ce qui correspond logiquement à des **interférences constructives** entre toutes les ondes diffractées par les N fentes (le calcul du paragraphe IV.2.2 est donc inutile pour cette seule détermination) ; d'où :

$$j = \frac{2pa}{l}(\sin q - \sin i) = 2kp \Rightarrow \boxed{\sin q = \sin i + \frac{kl}{a} = \sin i + knl} \quad (n = \frac{l}{a} = \text{nombre de traits/mètre})$$

- Cette relation fondamentale montre que les différentes longueurs d'ondes d'une lumière **polychromatique** peuvent être séparées angulairement, qu'un réseau « disperse » une telle lumière et permet d'en faire l'**analyse spectrale** ; à chaque valeur de k , correspond un « **spectre d'ordre k** ».
- A cause de la largeur finie des raies obtenues et en utilisant le critère de Rayleigh, on montre que le « **pouvoir séparateur** » d'un réseau a pour expression :

$$\boxed{R = \frac{l}{dl} = kN}$$

où dl est le plus petit écart de longueur d'onde pouvant être mise en évidence par le réseau, autour de la longueur d'onde l . Cette valeur peut atteindre 10^6 pour un « réseau échelle » utilisé dans un ordre élevé (rappelons que pour un réseau plan, la luminosité diminue avec l'ordre).

V. REMARQUES FINALES

♦ **Sources cohérentes/incohérentes** : en conclusion de ce chapitre, on retiendra qu'il est fondamental de reconnaître si des sources sont cohérentes ou non. S'il y a **cohérence**, on doit **sommer** les **amplitudes** ; dans le **cas contraire**, on se contente de sommer les **éclaircissements**.

♦ **Facteur de visibilité** : il faut connaître les résultats concernant les cas idéalisés (sources ponctuelles et monochromatiques), et savoir que la prise en compte de la réalité (sources étendues et/ou non parfaitement monochromatiques, détecteurs non ponctuels...) conduit à l'introduction de divers facteurs de visibilité qui « modulent » les expressions idéales.

♦ **Localisation des franges** : il faut pouvoir répondre instinctivement à une telle question. Avec une source idéale **ponctuelle**, les franges sont **non localisées** ; avec une source **étendue**, les franges deviennent **localisées** : pour un interféromètre de Michelson réglé en **lame d'air**, les franges sont localisées à **l'infini**, alors qu'elles sont localisées « **sur les miroirs** » lorsqu'il est réglé en **coin d'air**.